**Clasa a 9 a**

**Barem de corectare**

## Subiectul 1

**2p** $a)$ Luăm $a_1=\frac{a}{\sqrt{x}}, a_2=\frac{b}{\sqrt{y}}, a_3=\frac{c}{\sqrt{z}}$ , $b_1=\sqrt{x}, b_2=\sqrt{y}, b_3=\sqrt{z}$ în inegalitatea Cauchy-Schwartz

$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$ obținem inegalitatea din enunț .

$b)$ Luăm $a=2y+z, b=2z+1, c=y+t$ , $x=2z+1, y=2y+t, z=y+t$ în inegalitatea de la $a)$ .

obținem $\frac{(2y+z)^2}{2z+1}+\frac{(2z+1)^2}{2y+t}+\frac{(y+t)^2}{y+z}\geq\frac{(2y+z+2z+1+y+t)^2}{2z+1+2y+t+y+z}=1+3y+3z+t$ .

**1p** deci $\frac{(2y+z)^2}{2z+1}+\frac{(2z+1)^2}{2y+t}+\frac{(y+t)^2}{y+z}-3y-3z-t\geq 1$ . $(1)$

dar $x\cdot(2y)+(2y)\cdot 3+3\cdot x\leq x^2+(2y)^2+3^2$ rezultă $\frac{2xy+3x+6y}{x^2+4y^2+9}\leq 1$ . $(2)$

**2p** din $(1),(2)$ $\frac{2xy+3x+6y}{x^2+4y^2+9}=\frac{(2y+z)^2}{2z+1}+\frac{(2z+1)^2}{2y+t}+\frac{(y+t)^2}{y+z}-3y-3z-t=1$

**2p** obținem $x=2y=3$ , $\frac{2y+z}{2z+1}=\frac{2z+1}{2y+t}=\frac{y+t}{y+z}$ rezultă $x=3$ , $y=\frac{3}{2}$ , $z=2$ , $t=2$.

## Subiectul 3

$m(\angle ABD)=m(\angle ACE)=90^0-m(\angle BAC)$ $\Rightarrow$ arcele $AE$ și $AD$ au aceeași măsură

$\Rightarrow$ $\Delta AED$ este isoscel ..........................................................................................................**2p**

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ = $2\overrightarrow{AM}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AH}$ , unde $M$ = mijlocul lui $[DE]$......................................**2p**

Rezultă $M\in AH$ ..........................................................................................................................**1p**

Dar $AM\perp DE$ și $AH\perp BC$ $\Rightarrow$ $DE \parallel BC$ $\Rightarrow$ arcele $BE$ și $CD$ au aceeași măsură, deci arcele $AB$ și $AC$ sunt congruente, adică $AB=AC$ .......................................................................................... ..**2p**

PROBLEMA clasa a IX-a - SUB. 2

ETAPA LOCALA - 2020

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n=\left[\sqrt{n^2-5n+10}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărul $x$.
Determinați $n\in\mathbb{N}^*$, dacă $a_1+a_2+\dots+a_n=2025 = 45^2$

Prof. O. Purcaru - Ploiești

Soluție. Avem inegalitatea: $(n-3)^2<n^2-5n+10<(n-2)^2$, $\forall n\geq 7 \iff n^2-6n+9<n^2-5n+10<n^2-4n+4 \iff$ 2p

$-6n+9<-5n+10<-4n+4$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$n>1$ "A" $\qquad n>6$ "A" dacă $n\geq 7$ 1p

$n-3<\sqrt{n^2-5n+10}<n-2 \Rightarrow a_n=\left[\sqrt{n^2-5n+10}\right]=n-3,\ \forall n\geq 7.$ 1p

1p $\begin{cases} a_1=[\sqrt{6}]=2 \quad a_2=[\sqrt{4}]=2,\ a_3=[\sqrt{4}]=2 \quad a_4=[\sqrt{6}]=2 \quad a_5=[\sqrt{10}]=3 \\ a_6=[\sqrt{16}]=4 \quad a_n=n-3,\ \forall n\geq 7 \end{cases}$

$\underbrace{a_1+a_2+\dots+a_n}_{S_n}=2+2+2+2+3+4+4+5+\dots+n-3.$

$S_n=9+1+2+\dots+n-3=9+\frac{(n-3)(n-2)}{2},\ \forall n\geq 7$ 1p

$9+\frac{(n-3)(n-2)}{2}=2025 \iff \frac{(n-3)(n-2)}{2}=2016$

$\iff (n-3)(n-2)=4032 \iff (n-3)(n-2)=63\cdot 64$ 1p

deci $n=66$.

IX – SUBIECT 4

În triunghiul ABC avem AB = AC. Punctele D și E împart baza BC în trei părți egale, punctul i ∈ (AB) cu Ai = 6iB. O dreaptă d ce conține i taie (AD), (AE) respectiv (AC) în punctele H, G respectiv F. Dacă AG = HD calculați AF/FC.

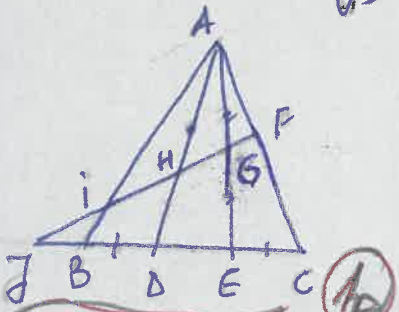
EMIL VASILE

S. Fie $iF \cap BC = \{J\}$. Evident $AD = AE$, $AH = GE$.

Notăm $BD = DE = EC = x$, $JB = ux$, $\frac{GE}{AG} = \alpha$.

Atunci $\frac{AH}{HD} = \alpha$.

Aplic Menelaus în $\triangle ADE$, $\triangle ABD$ și transversala d



$$\underbrace{\frac{JD}{JE} \cdot \frac{GE}{GA} \cdot \frac{AH}{HD} = 1}_{1p} \text{ și } \underbrace{\frac{JB}{JD} \cdot \frac{HD}{HA} \cdot \frac{Ai}{iB} = 1}_{1p} \Rightarrow \frac{JD}{JE} \cdot \alpha^2 = 1 \Rightarrow \frac{x + xu}{2x + xu} = \frac{1}{\alpha^2}$$

1p $\frac{1+u}{2+u} = \frac{1}{\alpha^2}$ (1) și $\frac{xu}{xu + x} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot 6 = 1$ 1p $\Rightarrow \frac{u}{1+u} = \frac{\alpha}{6}$ (2) $u = \frac{\alpha}{6-\alpha}$ și

$\Rightarrow u = \frac{1}{\alpha^2 - 1} - 1 = \frac{\alpha}{6-\alpha}$ și $\frac{1}{\alpha^2-1} = \frac{6}{6-\alpha} \Rightarrow 6\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$ 1p

$\Rightarrow u = \frac{2}{7}$. Apoi $\triangle ABC$, $J - i - F \Rightarrow \underbrace{\frac{JB}{JC} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{Ai}{iB} = 1}_{1p} \Leftrightarrow \frac{2}{23} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot 6 = 1$

$\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{12}{13}$ 1p