Soluție :

a) $\sqrt{AB} \le \frac{A+B}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2 \ge 0$ **1p**

b)Din inegalitatea mediilor, $\sqrt{txy-xz} = \sqrt{x(ty-z)} \le \frac{x+ty-z}{2}$,

$\sqrt{tyz-xy} = \sqrt{y(tz-x)} \le \frac{y+tz-x}{2}$,

$\sqrt{txz-yz} = \sqrt{z(tx-y)} \le \frac{z+tx-y}{2}$ **2p**

Prin adunare,

$3t = \sqrt{txy-xz} + \sqrt{tyz-xy} + \sqrt{txz-yz} \le \frac{x+ty-z}{2} + \frac{y+tz-x}{2} + \frac{z+tx-y}{2} = \frac{t(x+y+z)}{2}$ =3t,.......**2p**

rezultă că în inegalitatea mediilor avem egalitate, deci numere egale $\Rightarrow$ $x = ty - z$, $y = tz - x$, $z = tx - y$ **1p**

$\Rightarrow$ prin adunare, $6 = 6t - 6$ $\Rightarrow$ $t = 2$ $\Rightarrow$ $x + z = 2y$, $y + x = 2z$, $y + z = 2x$. Prin scăderea primelor două relații se obține $z - y = 2(y - z)$ $\Rightarrow$ $y = z$ $\Rightarrow$ din una din relații $x = y = z$, iar din $x + y + z = 6$ rezultă $x = y = z = 2$ **1p**

$x+5y-1=0 \quad |-5 \quad |-10$

$x-6=-5(y+1)$

$x-11=-5(y+2)$

$x \in [6;11]$

$6 \le x \le 11 \quad |-6$

$0 \le x-6 \le 5$

$0 \le -5(y+1) \le 5 \quad |:(-5)$

$-1 \le y+1 \le 0 \quad |-1$

$-2 \le y \le -1 \quad |+2$

$0 \le y+2 \le 1$

$|y+1| = -y-1 \quad \Leftarrow$

$|y+2| = y+2 \quad \Leftarrow$

$$a=\sqrt{(x^2-12x+36)+(y^2+2y+1)}+\sqrt{(x^2-22x+121)+(y^2+4y+4)} \quad 1p$$

$$a=\sqrt{(x-6)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-11)^2+(y+2)^2} \quad 1p$$

$$a=\sqrt{25(y+1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{25(y+2)^2+(y+2)^2} \quad 1p$$

$$a=\sqrt{26(y+1)^2}+\sqrt{26(y+2)^2} \quad 1p$$

$$a=\sqrt{26}\left(|y+1|+|y+2|\right) \quad 1p$$

$$a=\sqrt{26}\left(-\cancel{y}-1+\cancel{y}+2\right) \quad 1p$$

$$a=\sqrt{26} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad 1p$$

iunie 2020

cls a VIII-a

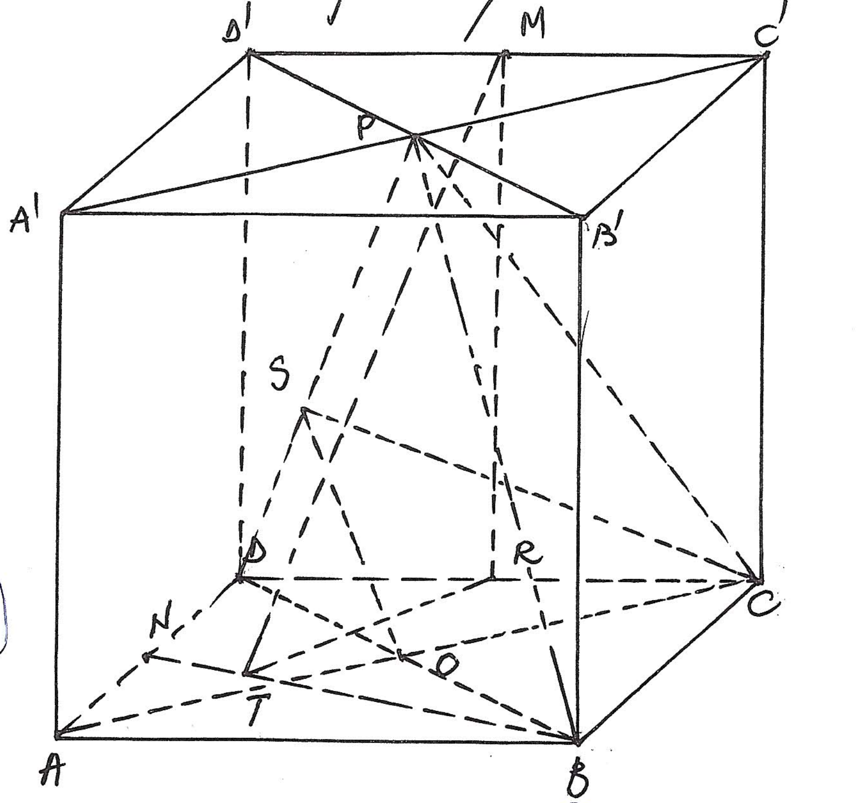
Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura $AB = 6\sqrt{2}$ cm și punctele M și N mijloacele laturilor $C'D'$ și respectiv AD. Știind că $A'C' \cap B'D' = \{P\}$, calculați:

a) măsura unghiului format de dreptele BC' și $B'D$.

b) distanța de la punctul M la dreapta BN.

c) tangenta unghiului format de planele (PCD) și (PBD).

Prof. A. Negrilă.



Soluție.

a) $DC \perp (BCC') \Rightarrow$

$\Rightarrow DC \perp BC' \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} BC' \perp DC \\ \text{dar } BC' \perp B'C \text{ (ip)} \\ DC \cap B'C = \{C\} \end{array}\right| \Rightarrow$ 1

$\Rightarrow BC' \perp (DC; B'C) \Rightarrow$

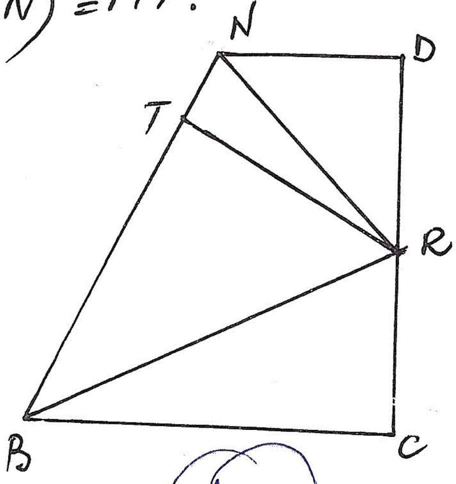
$\Rightarrow BC' \perp B'D \Rightarrow$

$m\sphericalangle(BC'; B'D) = 90°$. 1

b) Fie $MR \parallel CC'$, $R \in (CD)$

$\Rightarrow MR \perp (ABC)$ și $RD = RC$. 1

$\left.\begin{array}{l} MR \perp (ABC) \\ RT \perp BN \\ RT, BN \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow MT \perp BN \Rightarrow d(M, BN) = MT.$



$\left.\begin{array}{l} MR \perp (ABC) \\ RT \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow MR \perp RT.$

$RD = RC \Rightarrow A_{BRN} = \frac{1}{2} A_{BCDN}$

$A_{BCDN} = \frac{(BC+DN) \cdot DC}{2} = 54\text{ cm}^2;$

$A_{BRN} = \frac{BN \cdot RT}{2}$; $BN = 3\sqrt{10}$ cm; $RT = \frac{9\sqrt{10}}{5}$ cm; 1p

În ΔMRT: $m(\widehat{MRT}) = 90^\circ$: $MT^2 = MR^2 + RT^2 \Rightarrow MT = \frac{5\sqrt{290}}{5}$ cm. 1p

c) $DD' \perp (ABC) \Rightarrow DD' \perp CO$
dar $CO \perp BD$ (ip) $\Bigg| \Rightarrow CO \perp (BDD') \Rightarrow CO \perp (PBD)$.

$$\left.\begin{array}{l} CO \perp (PBD) \\ OS \perp PD \\ OS, PD \subset (PBD) \end{array}\right| \Rightarrow CS \perp PD.$$

$$\left.\begin{array}{l} (PBD) \cap (PCD) = PD \\ OS \perp PD,\ OS \subset (PBD) \\ CS \perp PD,\ CS \subset (PCD) \end{array}\right| \Rightarrow \measuredangle((PBD),(PCD)) = \measuredangle(OS; CS) = \widehat{CSO}.$$ 1

$$\left.\begin{array}{l} CO \perp (PBD) \\ OS \subset (PBD) \end{array}\right| \Rightarrow CO \perp OS \quad ; \quad OS = \frac{OP \cdot OD}{PD} \quad ; \quad PD = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$OS = 2\sqrt{6}$ cm.

$$tg\,\widehat{CSO} = \frac{CO}{OS} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$ 1

$AD = a$

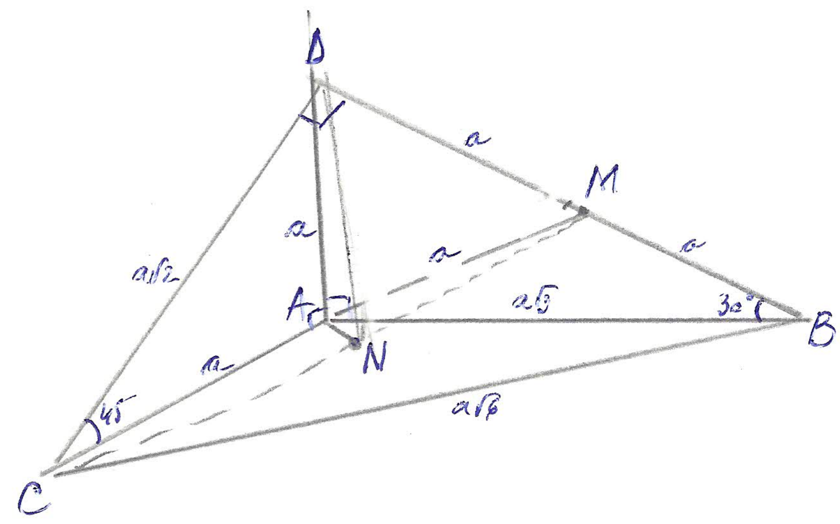
$m(\widehat{DBA}) = 30^\circ$

$m(\widehat{ACD}) = 45^\circ$

$m(\widehat{BDC}) = 90^\circ$

a) ΔABC obtuzunghic

b) $d[A;(BDC)] = ?$



Dem:

a) Din $\Delta DAB, \Delta BDC; \Delta DAC$ dreptunghice $\Rightarrow AD = AC = a$;

$DC = a\sqrt{2}$; $BA = a\sqrt{3}$; $BC = a\sqrt{6}$; $BD = 2a$ (1p)

$AC^2 + AB^2 = 4a^2 < 6a^2 = BC^2 \Rightarrow m(\widehat{BAC}) > 90^\circ$ (1p)

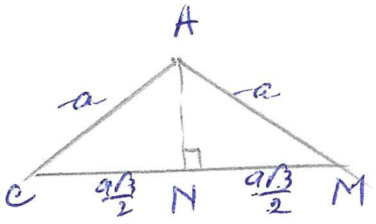
b) Fie M mijlocul segm. (BD), N mijlocul segm (CM) (1p)

În $\Delta DAB \Rightarrow AM = \frac{BD}{2} = a \Rightarrow AM = AC \Rightarrow \Delta ACM$ isoscel (1p)

În ΔACM is; (AN) mediană $\Rightarrow AN \perp CM$ (1p)

Din $AD = AC = AM$ și $(DCM) = (DCB) \Rightarrow pr_{(DCB)} A = N$ (2p)

Met 1:



$AN^2 = AC^2 - CN^2 \Rightarrow AN = \frac{a}{2}$

Met 2:

$\Delta MDC \Rightarrow DN = \frac{MC}{2} \Rightarrow$

$DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Delta ADN \ (m(\widehat{N}) = 90^\circ) \Rightarrow$

$AN^2 = AD^2 - DN^2 \Rightarrow AN = \frac{a}{2}$

Obs: Punctaj integral în cazul în care se rezolvă cu invarianța de volume în tetraedrul ABCD.