

**PROBLEMĂ CLASA a XII-a**

Calculați:  $\int_1^e \frac{\ln(x^3 e^{5x+2})}{\ln(x^x e^{x^2})} dx$

Prof. Doinaru Mihaiela, Sinaia  
Prof. Laiu Răzvan, Sinaia

**Soluție și barem de corectare**

- $I = \int_1^e \frac{5x+3\ln x+2}{x(x+\ln x)} dx \dots\dots\dots 1p$
- $I = 3 \int_1^e \frac{x+\ln x}{x(x+\ln x)} dx + 2 \int_1^e \frac{x+1}{x(x+\ln x)} dx = 3I_1 + 2I_2 \dots\dots\dots 2p$
- $I_1 = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = 1 \dots\dots\dots 1p$
- $I_2 = \int_1^e \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(x+\ln x)} dx = \int_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x} = \ln(x + \ln x) \Big|_1^e = \ln(e + 1) \dots\dots\dots 2p$
- $I = 3 + 2\ln(e + 1) \dots\dots\dots 1p$

-----  
7p

Fie  $G$  un grup multiplicativ format cu matrice nesingulare din  $M_2(\mathbb{R})$  astfel incat  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in G$  si  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ .

- Aratati ca  $(G, \cdot)$  este grup neabelian;
- Determinati grupul  $G$  finit, de ordin minim, avand proprietatea din enunt.

**Solutie.**

Fie  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in G, U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  si  $S = TU = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G$ . 1p

a)  $TU \neq UT \Rightarrow (G, \cdot)$  neabelian 2p

b) Se verifica imediat egalitatile  $T^2 = S^3 = I_2, S^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, TS = S^2T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U, ST = TS^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 2p

de unde rezultă că mulțimea  $H = \{I_2, S, S^2, T, TS, TS^2\} \subset G$  formează împreună cu înmulțirea un grup izomorf cu grupul permutațiilor de ordinul trei  $S_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$ , unde

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  si  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Deci răspunsul este  $G = H = \{I_2, S, S^2, T, TS, TS^2\}$ , 1p

iar tabloul grupului  $G$  este următorul:

$\bullet$	$I_2$	$S$	$S^2$	$T$	$TS$	$TS^2$
$I_2$	$I_2$	$S$	$S^2$	$T$	$TS$	$TS^2$
$S$	$S$	$S^2$	$I_2$	$TS^2$	$T$	$TS$
$S^2$	$S^2$	$I_2$	$S$	$TS$	$TS^2$	$T$
$T$	$T$	$TS$	$TS^2$	$I_2$	$S$	$S^2$
$TS$	$TS$	$TS^2$	$T$	$S^2$	$I_2$	$S$
$TS^2$	$TS^2$	$T$	$TS$	$S$	$S^2$	$I_2$

# PROBLÈMA: CLASA a XII-a

ETAPA LOCALA 20.20.

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă ce verifică relația:  
 $f^n(x) + 2f(x) = 3x, \forall x \in \mathbb{R}$  și  $n$  este un număr natural  
împar. Să se arate că:  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{2n+1}{3(n+1)}$ .

Prof. O. Purcaru - Ploiesti

Soluție Fie  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^n + 2x$ .

$g'(x) = nx^{n-1} + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$   $n-1 = \text{par.} \Rightarrow g$  strict  
crescătoare deci injectivă. Cău  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  și  
 $f \nearrow \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow g$  surjectivă deci inversabilă.

$$\text{Avem: } g(f(x)) = f^n(x) + 2f(x) = 3x \quad | \quad g^{-1}$$

$$\text{Deci } f(x) = g^{-1}(3x) \quad \text{Atunci } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g^{-1}(3x) dx$$

$$\int_0^1 g^{-1}(3x) dx = \int_0^1 g^{-1}(g(t)) \frac{1}{3} (nt^{n-1} + 2) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (nt^{n-1} + 2) dt$$

$$x = \frac{1}{3} g(t) \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow g(t)=0 \Rightarrow t+2t=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow \frac{1}{3}g(t)=1 \Rightarrow t^n+2t=3 \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$g$  bijectivă.

$$dx = \frac{1}{3} g'(t) dt = \frac{1}{3} (nt^{n-1} + 2) dt$$

$$\text{Deci } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{nt^{nt}}{n+1} + t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{2n+1}{3(n+1)} \quad \text{z.e.d.}$$

$\overbrace{\hspace{10em}}^{\text{Q.E.D.}}$

Fie  $(G, \cdot)$  un grup abelian finit, de element neutru  $e$ , si functia  $f : G \rightarrow G, f(x) = x^2$ .

- Daca  $f$  este surjectiva, aratati ca produsul elementelor grupului  $(G, \cdot)$  este egal cu  $e$ ;
- Dati exemplu concret de un grup  $(G, \cdot)$  in conditiile problemei avand produsul elementelor egal cu  $e$ , pentru care  $f$  nu este surjectiva;
- Daca  $f$  este injectiva, aratati ca produsul elementelor multimii  $\text{Im}(f)$  este egal cu  $e$ .

**Solutie.**

Multimea fiind finita, conditiile de injectivitate, respectiv surjectivitate ale functiei  $f$  sunt echivalente. Se arata imediat ca  $f$  este morfism si apoi avem :

$$a) \prod_{x \in G} x \stackrel{f \text{ bijectiva}}{=} \prod_{x \in G} f(x) \stackrel{f \text{ morfism}}{=} f\left(\prod_{x \in G} x\right) = \left(\prod_{x \in G} x\right)^2 \stackrel{(G, \cdot) \text{ grup}}{\Rightarrow} \prod_{x \in G} x = e;$$

b) Fie  $(G, \cdot)$  grupul lui Klein,  $G = \{e, u, v, w\}$ . Avem  $e \cdot u \cdot v \cdot w = e \cdot w \cdot w = e \cdot e = e$  si  $f(e) = f(u) = f(v) = f(w) = e \Rightarrow f$  nu este injectiva;

c)  $f$  morfism  $\Rightarrow$   $H = \text{Im}(f)$  subgrup al lui  $G$ . Se aplica apoi punctul (a) pentru grupul  $(H, \cdot)$  si functia surjectiva  $g : H \rightarrow H, g(x) = x^2$  ( $f$  injectiva  $\Rightarrow$   $g$  injectiva  $\Rightarrow$   $g$  surjectiva).

3p

2p

2p