

Clasa a 9 a

Barem de corectare

Subiectul 1

a) Tinand cont de faptul ca $3\sqrt{\frac{27+\sqrt{717}}{18}} \cdot 3\sqrt{\frac{27-\sqrt{717}}{18}} = 3\sqrt{\frac{12}{18 \cdot 18}} = \frac{1}{3}$ 2p.

obtinem $3(a^2 - b^2) = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4 \in \mathbb{N}$ 1p

$a^3 - a = \left(\frac{27+\sqrt{717}}{18} + \frac{27-\sqrt{717}}{18} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot a \right) - a = \frac{54}{18} = 3 \in \mathbb{N}$ 1p

b) Din a) rezultă $a^3 - a = 3 \Rightarrow$ a soluție a ecuației $x^3 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^3 - x - a^3 + a = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0$ 2p

Rezultă soluțiile: $x_1 = a, x_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm i \frac{b\sqrt{3}}{2}$ 1p

Subiectul 2

Metoda 1

- $14 + 14 \cdot 4^x + 14 \cdot 9^x = 1 + 4 \cdot 4^x + 9 \cdot 9^x + 4 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x + 12 \cdot 6^x$ 1p

- $13 + 10 \cdot 4^x + 5 \cdot 9^x - 4 \cdot 2^x - 6 \cdot 3^x - 12 \cdot 6^x = 0$ 1p

- $4 + 9 + 4^x + 9 \cdot 4^x + 9^x + 4 \cdot 9^x - 4 \cdot 2^x - 6 \cdot 3^x - 12 \cdot 6^x = 0$ 1p

- $(4 - 4 \cdot 2^x + 4^x) + (9 - 6 \cdot 3^x + 9^x) + (9 \cdot 4^x - 12 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x) = 0$ 1p

- $(2 - 2^x)^2 + (3 - 3^x)^2 + (3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x)^2 = 0$ 1p

- $\begin{cases} 2 - 2^x = 0 \\ 3 - 3^x = 0 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x = 0 \end{cases}$ 1p

- $x = 1$ 1p

7p

Metoda 2

Folosim inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz:

$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ cu egalitate dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

pentru $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = 1, b_2 = 2^x, b_3 = 3^x$ 2p

și avem:

$(1 + 4 + 9)(1 + 2^x + 3^x) \geq (1 + 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x)^2$ 3p

cu egalitate pentru $1 = \frac{2}{2^x} = \frac{3}{3^x}$ adică pentru $x = 1$ 2p

Subiectul 4

Pentru $z \rightarrow iz$ se obține $f(-z) = -3i \cdot \bar{z} + 2i \cdot f(iz)$ 1p

Înlocuim $f(iz)$ din relația inițială $\Rightarrow f(-z) = -3i \cdot \bar{z} + 2i \cdot (3\bar{z} + 2i \cdot f(z)) \Rightarrow$

$f(-z) = 3i \cdot \bar{z} - 4f(z)$. Din ultima relație, dacă $z \rightarrow -z$ obținem $f(z) = -3i \cdot \bar{z} - 4f(-z) =$

$-3i \cdot \bar{z} - 4(3i\bar{z} - 4f(z)) = -15i \cdot \bar{z} + 16f(z)$ 3p

$\Rightarrow -15f(z) = -15i \cdot \bar{z} \Rightarrow f(z) = i \cdot \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C}$ 1p

Fie $w \in \mathbb{C}$, atunci ecuația $f(z) = w$ are soluția unică $z = i\bar{w} \in \mathbb{C}$, deci f este bijectivă 2p

(Sau: $(f \circ f)(z) = i \cdot \overline{i\bar{z}} = -i^2 z = z, \forall z \Rightarrow f = f^{-1} \Rightarrow f$ este inversabilă deci bijectivă).

Rezolvati ecuatia

$$(3x+2)\sqrt{9x^2+12x+2024} + \sqrt{4x^2+12x+2029}(2x+3)=0$$

Solutie.

Nachib Petre

- 1 p - ecuatia echiv. cu $(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2+2020} + \sqrt{(2x+3)^2+2020}=0$.
- 2 p - fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2+2020}$, f este impară
- 1 p - f strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă.
- 2 p - notăm $3x+2=a$, $2x+3=b$; ecuatia este $f(a)+f(b)=0$.
- 1 p - ~~ca~~ $f(a) = -f(b) = f(-b)$, f injectivă $\Rightarrow a = -b \Rightarrow x = -1$.